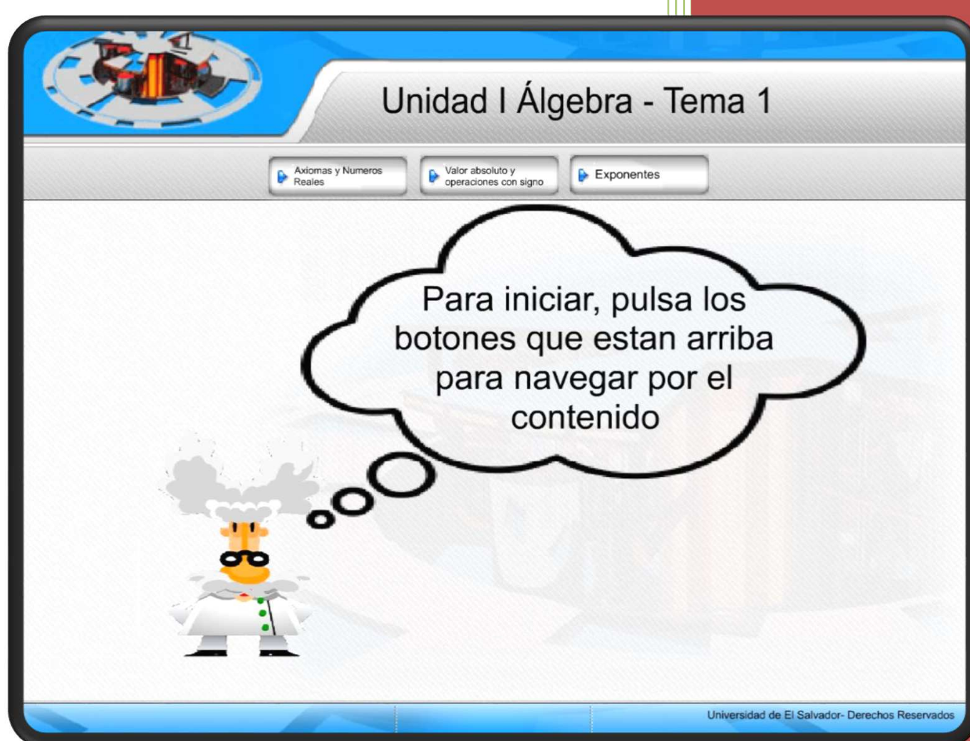
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Refuerzo para Aspirantes a Nuevo Ingreso



MATEMÁTICAS



CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

INTRODUCCIÓN

La matemática aplicada es una herramienta muy utilizada por los ingenieros en sus múltiples tareas que realizan diariamente. Por lo tanto en su formación se incluyen varios cursos de matemática.

De acuerdo a nuestra experiencia, los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad presentan ciertas debilidades en algunos temas de algebra, geometría y trigonometría, por lo que este curso pretende reforzar el aprendizaje en dichos temas, para que puedan cursar con éxito las materias del primer año de estudios en la universidad.

Como futuro profesional, en alguna rama de las ingenierías o arquitectura, usted deberá sentirse a gusto, feliz o satisfecho, estudiando tópicos de matemática, por lo que dos horas diarias serán insuficientes.

UNIDAD 1 ALGEBRA

- **NUMEROS REALES (IR)**

Los números reales son aquellos números que utilizamos diariamente, para realizar operaciones tales como sumas, retas, productos, cocientes, etc. O para expresar resultados de medidas.

Ejemplos de números reales son: $0,\ 1,\ -3,\ \frac{2}{3},\ \frac{-4}{5},\ \sqrt{2},\ \pi,\ e$

– ***AXIOMAS DE CAMPO***

Los axiomas de campo de los números reales son evidencias no susceptibles de demostración sobre los cuales se fundamenta dichos números.

AXIOMAS PARA LA OPERACIÓN SUMA

1) **Ley conmutativa**
   Para todo a y b de $\mathbb{R}$, $a + b = b + a$

2) **Ley asociativa**
   Para todo a, b y c de $\mathbb{R}$,
   $$(a+b)+c=a+(b+c)$$

3) **Existencia y unicidad del elemento neutro aditivo**
   Hay un elemento y solo un elemento en $\mathbb{R}$, al que denotaremos por “0” tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple:
   $$a+0=0+a=a$$

4) **Existencia y unicidad del inverso aditivo**
   Para cada $a \in \mathbb{R}$, hay uno y solo un elemento en $\mathbb{R}$, al que denotaremos por “$-a$”, tal que:
   $$a+(-a)=(-a)+a=0$$

AXIOMAS PARA LA OPERACIÓN DE MULTIPLICACIÓN

5) **Ley conmutativa**

Para todo a y b de $\mathbb{R}$,

$$ab = ba$$

6) **Ley asociativa**

Para todo a, b, c de $\mathbb{R}$,

$$(ab)c = a(bc)$$

7) **Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo**

Hay uno y solo un elemento en $\mathbb{R}$ que denotaremos por "1", tal que para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a(1) = (1)a = a$$

8) **Existencia y unicidad del inverso multiplicativo**

Para cada $a \in \mathbb{R}$, diferente de cero, hay uno y solo un elemento en $\mathbb{R}$, que denotaremos por "a^{-1}" ó "$\frac{1}{a}$", tal que,

$$a\left(a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)a = 1$$

9) **Ley distributiva**

$$\text{Para todo } a, b, c \text{ en } \mathbb{R},$$

$$a(b + c) = ab + ac$$ ó

$$(b + c)a = ba + ca$$

Además, los números reales cumplen las siguientes propiedades para la relación de igualdad:

1) Si $a=b$ y $c=d$, entonces:
$a+c=b+d$

2) Si $a=b$ y $c=d$, entonces:
$ac=bd$

3) Si dos cantidades son iguales, entonces puede ser sustituida una por otra.

4) Si dos cantidades son iguales, entonces puede ser sustituida una por otra.

A partir de los axiomas de campo de los números reales se obtienen las leyes del algebra, algunas de la cuales enunciamos a continuación:

1) **Ley de cancelación para la suma**

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$. Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$

2) **Ley de cancelación para el producto**

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$. Si $ac=bc$, entonces $a=b$

3) $0(a)=0$, para todo $a \in \mathbb{R}$

4) $(-a)(-b)=ab$, para todo $a,b \in \mathbb{R}$

5) $a(-b)=-(a)b=-(ab)$, para todo $a,b \in \mathbb{R}$

6) Para todo $a,b \in \mathbb{R}$, $ab=0$ si y sólo si $a=0$ ó $b=0$

Veamos como deducir una de las partes de la ley 5), justificando cada paso, para que después usted deduzca las otras leyes.
Una forma:

$a+(-a)=0$, elemento inverso
$(a+(-a))b=0(b)$, propiedad de igualdad
$ab+(-a)b=0$, ley distributiva y ley 3)
$-(ab)+ab+(-a)b=-(ab)+0$, propiedad de igualdad
$(-(ab)+ab)+(-a)b=-(ab)$, ley asociativa y elemento neutro
$0+(-a)b=-(ab)$, elemento inverso
$(-a)b=-(ab)$, elemento neutro

– SUSTRACCIÓN

Si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $a-b=a+(-b)$

Ejemplo

1) $5-3=5+(-3)$

2) $2-5=2+(-5)$

– DIVISIÓN

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, entonces:

$$a \div b = a\left(\frac{1}{b}\right) = a(b^{-1}) = \frac{a}{b}$$

OTRAS LEYES DEL ÁLGEBRA

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0, d \neq 0$, entonces,

7) $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$

8) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ac}{bd}\right)$

9) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$

10) $\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$

11) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

12) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

13) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ $\quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Tratemos de deducir la ley 11), justificando cada paso, para que usted deduzca otras.

Una forma:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=a(b^{-1})+c(d^{-1})$$,Definición de cociente

$$=\left(a(b^{-1})+c(d^{-1})\right)\frac{bd}{bd}$$,Elemento neutro y propiedad de la igualdad

$$=\left(a(b^{-1})bd+c(d^{-1})bd\right)\frac{1}{bd}$$,Ley distributiva y definición de cociente

$$=\left(a(b^{-1}b)d+c(d^{-1}d)b\right)\frac{1}{bd}$$,Ley conmutativa y asociativa

$$=\left(ad+cb\right)\frac{1}{bd}$$,Elemento inverso

$$=\frac{ad+bc}{bd}$$,Definición de cociente y ley conmutativa

- **VALOR ABSOLUTO**

El valor absoluto del número real se denota por $|a|$ y se define así:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{Si } a\geq 0 \\ -a, & \text{Si } a<0 \end{cases}$$

Ejemplo

1) $|4|=4$, ya que $4>0$
2) $|0|=0$
3) $|-5|=-(-5)=5$, ya que $-5<0$

- **OPERACIONES CON NÚMEROS CON SIGNOS**

Tomando en cuenta la ley distributiva y la definición de valor absoluto, podemos enunciar leyes prácticas para operar con números:

a) Para sumar dos números del mismo signo, se suman sus valores absolutos y se coloca el signo común. Ejemplo:

1) Sumar 3 con 5
Solución:
Valor absoluto: $|3| = 3$, $|5| = 5$
Suma de valores absolutos: $3+5=8$
Colocando signo común: $3+5=8$

2) Sumar -3 con -5
Solución:
Valor absoluto: $|-3| = 3$, $|-5| = 5$
Suma de valores absolutos: $3+5=8$
Colocando signo común: $-3+(-5)=-8$

b) Para sumar dos números con signos opuestos, se resta el número de menor valor absoluto del número de mayor valor absoluto y se coloca el signo del número de mayor valor absoluto. Ejemplo:

1) Sumar 5 con -2
Solución:
Valor absoluto: $|5| = 5$, $|-2| = 2$
Resta de valores absolutos: $5-2=3$
Colocando signo : $5+(-2)=3$

2) Sumar 6 con -10
Solución:
Valor absoluto: $|6| = 6$, $|-10| = 10$

Resta de valores absolutos: $10-6=4$

Colocando signo: $6+(-10)=-4$

c) Para multiplicar dos números con signo, se multiplican sus valores absolutos y se le coloca signo positivo si los números son del mismo signo y signo negativo si son los números de signos opuestos. Ejemplo:

1) Multiplicar -5 con -3

   Solución:

   Valor absoluto: $|-5|=5$, $|-3|=3$

   Producto de valores absolutos: $5(3)=15$

   Colocando signo: $-5(-3)=15$

2) Multiplicar 4 con -3

   Solución:

   Valor absoluto: $|4|=4$, $|-3|=3$

   Producto de valores absolutos: $4(3)=12$

   Colocando signo: $4(-3)=-12$

d) Para restar dos números con signo, se cambia el signo del sustraendo y se suman como indica la ley a) y b).

1) Restar 5 de 8

   Solución:

   $$8-5=8+(-5)=3$$

2) Restar -4 de 6

   Solución:

   $$6-(-4)=6+4=10$$

- **EXPONENTE ENTERO**

Si n es un entero positivo, al símbolo a^n (donde $a \in \mathbb{R}$), se le llama potencia n-esima de a y representa el producto de n factores cada una igual a a . Ejemplo:

1) $(2)^3 = (2)(2)(2) = 8$
2) $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

En el símbolo a^n , se dice que a es la base de la potencia y n es el exponente. Por lo tanto el exponente indica las veces que la base se toma como factor, así en 2^5, el exponente 5 indica que la base, 2, se toma como factor 5 veces, o sea:

$$2^5 = (2)(2)(2)(2)(2)$$

-**LEYES DE LOS EXPONENTES**

Si m y n son enteros positivos y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$
2) $(a^m)^n = a^{mn}$
3) $(ab)^n = a^n b^n$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

5) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{, si m>n} \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{, si n>m} \\ 1 & \text{, si m=n} \end{cases}$

Trataremos de obtener la ley 1), justificando cada paso, para que usted obtenga las otras leyes.

Una forma:

$a^m.a^n$

$$a.a = \underbrace{(a.a.a...a)(a.a.a...a)}_{m\ factores}\underbrace{(a.a.a...a)(a.a.a...a)}_{n\ \text{factores}}, \text{ Definición de exponente entero}$$

$$= \underset{(m+n)\ \text{factores}}{(a.a.a...a)}, \text{ ley asociativa}$$

$$= a^{m+n}, \text{ Definición de potencia}$$

Ejemplo, calcular:

1) $4^2.4^3 = 4^{2+3} = 4^5$ $\left(2^3\right)^4 = \left(2^3\right)\left(2^3\right)\left(2^3\right)\left(2^3\right) = 2^{3+3+3+3} = 2^{3(4)} = 2^{12}$

2) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

3) $\left[(2)(4)\right]^3 = \left(2^3\right)\left(4^3\right)$

4) $\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

5) $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

6) $\frac{2^4}{2^4} = 1$